MAKTAB O‘QUV DASTURIDA FRAKTAL GEOMETRIYA: NAZARIYA, ALGORITMLAR VA BAHOLASH

Saitova Sayyora Sobirjonovna[1], Azizbek Ulug‘bekovich Abduxoshimov[2]

[1]Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Respublikasi Milliy universiteti
PhD, katta o‘qituvchi
[2]TIFT Moliyaviy menejment va texnologiyalar universiteti
magistratura talabasi
abduhosimovazizbek3@gmail.com
sayorass1985@gmail.com
https://doi.org/10.5281/zenodo.21440414

ANNOTATSIYA

Ushbu maqolada T–S–A triadasi asosida fraktal geometriyani maktab matematika o‘quv dasturiga integratsiya qilish uchun amaliyotga yo‘naltirilgan model taklif qilinadi: T (nazariy yadro: IFS, attraktor, quti o‘lchami), S (5–6-sinflardagi intuitiv tajribalardan 7–9-sinflardagi algoritmizatsiya va 10–11-sinflardagi analitikaga qadar spiral trayektoriya) va A (aniqlik, tushunish, algoritmlilik, ma’lumotlarni tahlil qilish, ijodkorlik va mustaqillik mezonlariga asoslangan rubrikalarga ega baholash tizimi). Bunda fraktal mavzular geometriya, informatika va tahlil elementlarini vizualizatsiya va o‘lchanadigan tajribalar orqali qanday qilib tabiiy ravishda bog‘lashi ko‘rsatilgan. Dars stsenariylari keltiriladi: "Pifagor daraxti" (5-sinf), "Ajdaho egri chizig‘i" (9-sinf), Pythonda o‘lchovlilikning mini-tadqiqoti (11-sinf) va 8-sinf uchun Kox qor parchasi bo‘yicha batafsil dars, unda o‘quvchilar 3-, 4- va 5-iteratsiyalardan keyin maydonni hisoblashadi. Ta’kidlanishicha, bunday ish uchburchak maydoni, masshtablash va chegara tushunchasini tushunishni sezilarli darajada mustahkamlaydi: perimetr o‘sib borishi bilan maydon chegaraga yaqinlashadi. Muayyan vositalar (GeoGebra, Python, Desmos), odatiy qiyinchiliklar va ularni yengib o‘tish yo‘llari muhokama qilinadi. Ushbu yondashuvning tanlov kurslari, raqamli darsliklar va tanlov kurslari uchun amaliy ahamiyati ko‘rsatiladi; natijalarning o‘lchanishi va topshiriqlarning takrorlanishiga urg‘u beriladi.

KALIT SO‘ZLAR

fraktal geometriya, maktab kursi, IFS, Kox qor parchasi, quti o‘lchami, spiral o‘rganish, baholash mezonlari, GeoGebra, Python, tadqiqot faoliyati, AKT (axborot va kommunikatsiya texnologiyalari).

ФРАКТАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ: ТЕОРИЯ, АЛГОРИТМЫ И ОЦЕНИВАНИЕ

Саитова Сайёра Собиржоновна[1], Абдухошимов Азизбек Улугбекович[2]

[1]Национальный университет Республики Узбекистан имени Мирзо Улугбека
PhD, старший учитель
[2]Университет финансового менеджмента и технологий TIFT
магистрант

АННОТАЦИЯ

Статья предлагает практико-ориентированную модель интеграции фрактальной геометрии в школьный курс математики на основе триады T–S–A: T (теоретическое ядро: IFS, аттрактор, коробочная размерность), S (спиральная траектория от интуитивных опытов в 5–6 классах к алгоритмизации в 7–9 и аналитике в 10–11), A (система оценивания с рубрикой по критериям точности, понимания, алгоритмичности, анализа данных, креативности и самостоятельности). Показано, как фрактальные сюжеты естественно связывают геометрию, информатику и элементы анализа через визуализацию и измеримые эксперименты. Приведены сценарии уроков: «Дерево Пифагора» (5 класс), «Кривая Дракона» (9 класс), мини-исследование размерности в Python (11 класс) и детально описанный урок для 8-го класса со снежинкой Коха, где учащиеся вычисляют площадь после 3-й, 4-й и 5-й итераций. Отмечено, что такая работа заметно укрепляет понимание площади треугольника, масштабирования и идеи предела: на фоне растущего периметра площадь приближается к пределу. Обсуждены инструменты (GeoGebra, Python, Desmos), типичные трудности и способы их преодоления. Показана практическая значимость подхода для элективов, цифровых учебников и олимпиадных курсов; акцент сделан на измеряемости результатов и воспроизводимости заданий.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

фрактальная геометрия, школьный курс, IFS, снежинка Коха, коробочная размерность, спиральное обучение, критерии оценивания, GeoGebra, Python, исследовательская деятельность, ИКТ (информационно-коммуникационные технологии).

FRACTAL GEOMETRY IN SCHOOL CURRICULUM: THEORY, ALGORITHMS, AND EVALUATION

Saitova Sayyora[1], Abdukhoshimov Azizbek[2]

[1]Mirzo Ulugbek National University of the Republic of Uzbekistan
PhD, Senior Lecturer
[2]TIFT University of Financial Management and Technology
Master’s Student

ABSTRACT

This article proposes a practice-oriented model for integrating fractal geometry into the school mathematics curriculum based on the T–S–A triad: T (theoretical core: IFS, attractor, box dimension), S (spiral trajectory from intuitive experiences in grades 5–6 to algorithmization in grades 7–9 and analytics in grades 10–11), and A (an assessment system with rubrics based on the criteria of accuracy, comprehension, data analysis, creativity, and independence). It demonstrates how fractal themes naturally link geometry, computer science, and elements of analysis through visualization and measurable experiments. Lesson scenarios are provided: "The Pythagorean Tree" (grade 5), "The Dragon Curve" (grade 9), a mini-exploration of dimensionality in Python (grade 11), and a detailed lesson for grade 8 on the Koch snowflake, where students calculate the area after 3, 4, and 5 iterations. It is noted that such work significantly strengthens the understanding of the area of a triangle, scaling, and the concept of a limit: as the perimeter grows, the area approaches a limit. Tools (GeoGebra, Python, Desmos), typical difficulties, and ways to overcome them are discussed. The practical significance of the approach for elective courses, digital textbooks, and competition courses is demonstrated; emphasis is placed on the measurability of results and the reproducibility of assignments.

KEYWORDS

fractal geometry, school course, IFS, Koch snowflake, box dimension, spiral learning, assessment criteria, GeoGebra, Python, research activities, ICT (information and communication technologies).

Введение.

Математика школьного курса быстро развивается в сторону визуализации, алгоритмизации и исследовательской деятельности. Фрактальная геометрия органично совмещает все три компонента: она наглядна, так как работает с самоподобными образами; она алгоритмична, поскольку строится на итерационных правилах; она исследовательская, потому что побуждает школьников ставить вопросы и проверять гипотезы в цифровых средах. В результате урок превращается из «передачи готовых истин» в проект, где каждый шаг можно увидеть, запрограммировать, измерить и защитить. Такой подход соответствует компетентностной модели и усиливает межпредметные связи (математика, информатика, естествознание).

Цель статьи - описать рабочую методическую модель интеграции фрактальной геометрии в основную школу и старшие классы, предложить готовые сценарии уроков и проекты, а также критерии оценивания, позволяющие измерять не запоминание определений, а уровень понимания и умение применять идеи самоподобия и итерации на практике.

1. Теоретические основы

Фрактал — это бесконечно самоподобная геометрическая фигура, каждый фрагмент которой повторяется при уменьшении масштаба.

Самоподобие – это свойство объектов, при котором их части повторяют общую структуру целого независимо от масштаба. Это понятие является фундаментальным для изучения фракталов и описания сложных систем в природе и технике. Свойство самоподобия позволяет моделировать явления, где наблюдается повторяющаяся структура на разных уровнях, что находит применение в математике, физике, биологии, компьютерной графике и других областях.

На школьном языке это формулируется так: если приблизить маленький фрагмент рисунка, он будет выглядеть как большой. В строгих терминах школьному учителю полезно знать: (1) система итерируемых функций (IFS) - конечный набор сжимающих отображений; (2) оператор Хатчинсона, который, применяясь к компакту, строит объединение его образов; (3) аттрактор IFS - множество, которое «воспроизводит само себя» при действии оператора; (4) фрактальная размерность, которую в школе целесообразно давать через коробочный эксперимент (box-counting). Идея проста: накладываем сетку на фигуру и смотрим, как растёт число занятых ячеек при уменьшении размера клетки.

Почему это важно для школы?

Во-первых, потому что многие природные формы лучше описываются фракталами, чем линиями и многоугольниками: ветви деревьев, береговые линии, снежинки.

Во-вторых, потому что итерации - это мост к программированию.

В-третьих, потому что понятия предела и бесконечности становятся зримыми - на глазах растёт периметр, а площадь может стремиться к пределу. Фальконер подчёркивает, что «фрактальная геометрия - это язык сложных форм, ранее считавшихся нерегулярными» (Falconer, 2014). Пайтген в популярной форме показывает, как «рисуемые руками» эксперименты ведут к математическим идеям (Peitgen, 1992).

2. Дидактическая модель T-S-A: теория - спираль - оценивание

Мы предлагаем дидактическую модель, включающую три компонента: T (Theoretical Core) - компактное теоретическое ядро для учителя; S (Spiral Learning) - спиральная траектория от наглядности к алгоритмизации и далее к формализации; A (Assessment) - согласованная система оценивания. Идея спирального движения восходит к Дж. Брунеру: «возвращаться к важной идее многократно, расширяя горизонт понимания» (Bruner, 1960). На практике это означает, что идея самоподобия встречается в 5-м классе как наблюдение, в 8-м - как алгоритм построения и измерения, в 11-м - как объект анализа и доказательной интерпретации.

T - учитель видит «скелет» темы и не боится строгих терминов (IFS, аттрактор, box-counting). S - учащиеся двигаются по понятным ступеням: интуиция → алгоритм → исследование.

A - оценивание фиксирует прогресс не по тестам на запоминание, а по продукту и его аргументации: рисунки, скрипты, графики, защита. Такое согласование предотвращает перегрузку и даёт классу ощущение «узнаваемой новизны»: каждый новый виток темы логично вырастает из предыдущего (Barnsley, 1993; Falconer, 2014).

3. Практика внедрения по ступеням обучения

5 класс - «Дерево Пифагора»: подобие, квадраты площадей, первая итерация

Цель: сформировать интуицию самоподобия и понятий «масштаб» и «доля». Материалы: миллиметровка, карандаш, линейка. Ход: (1)

рисуем квадрат-«ствол», строим на нём два равных квадрата-«ветви»; (2) повторяем на каждой ветви тот же приём; (3) обсуждаем: почему новые квадраты меньше и как быстро убывает их площадь?

Результат: дети видят, что площадь «дерева» растёт к пределу, но за счёт всё меньших квадратов - тем самым появляется визуальная модель суммы убывающей геометрической прогрессии (Peitgen, 1992).

8 класс - «Снежинка Коха»: площадь на нескольких итерациях и понимание площади треугольника

Цель: углубить понимание площади треугольника и предела на конкретном примере. Стартовая фигура - равносторонний треугольник со стороной s (его площадь $S_0 = (\sqrt{3}/4)a^2$). Правило итерации: каждую сторону делим на три части и на среднюю «настраиваем» внешний равносторонний треугольник.

Расчёты площади по итерациям (относительно S_0): после 1-й итерации добавляется 3 треугольника с сторонами по 1/9 от изначальной стороны S_0 каждый от сюда мы получаем формулу $S_1 = S_0 \cdot (1 + 1/3) = 4/3 S_0 \approx 1.333$;

после 2-й - 12 треугольников с сторонами по (1/81) от изначальной стороны S_0, итог

$S_2 \approx 1.481$;

Таким образом, площадь стремится к пределу $1.6 \cdot S_0$, тогда как периметр растёт неограниченно (Falconer, 2014).

Итерации площади снежинки Коха (относительно исходного треугольника S_0):

Итерация n	Добавлено треугольников	Отношение площадей S_n / S_0	Приближение к пределу
0	0	1.000000	62.5%
1	3	1.333333	83.3%
2	12	1.481481	92.6%

Таблица 1

Как видно из Таблицы 1, периметр растёт без ограничений, в то время как площадь стремится к пределу $1.6 \cdot S_0$. Эта таблица служит основанием для обсуждения предела последовательности площадей и роли квадратичного масштабирования треугольника.

В ходе занятия дети закрепляют формулу площади равностороннего треугольника, на практике видят квадратичное масштабирование площади («сторона уменьшилась в 3 раза - площадь уменьшилась в 9 раз») и осознают идею предела: добавляем «всё меньше и меньше», а итог приближается к фиксированному числу. После нескольких итераций учащиеся уверенно объясняют, почему маленькие треугольники дают всё меньший вклад в площадь - это переносится на темы площадей, пропорций и геометрических прогрессий в 8-м классе.

9 класс - «Кривая Дракона»: симметрии, рекурсии и инварианты

Цель: показать роль рекурсии и симметрий. Визуальный эксперимент: разворачиваем бумажную полоску пополам много раз, затем разворачиваем - получается ломаная «дракона». В GeoGebra или Python повторяем алгоритм, наблюдая появление глобальной структуры из локального правила. Обсуждаем инварианты: угол поворота, длина отрезка, симметрии. Этот урок подготавливает к идеям автомата Линдемаера, рекурсивным функциям и инвариантам преобразований (Peitgen, 1992; Barnsley, 1993).

11 класс - «Размерность и предел»: школьный box-counting и мини-исследование в Python

Цель: связать визуальный опыт с количественной оценкой сложности. Учащиеся

накладывают сетку на изображение фрактала и для нескольких значений ε считают N(ε) - число занятых ячеек. Строят график log N(ε) от −log ε и оценивают наклон прямой, интерпретируя его как оценку коробочной размерности. В Python это делается несколькими десятками строк: загрузка изображения, бинаризация, подсчёт ячеек для набора ε. Обсуждаем погрешности: ограниченная дискретизация, шум, границы. Такой опыт связывает математику с анализом данных. [1,3]

4. Оценивание: от формирующего к итоговому

Оценивание учащихся не маловажный аспект нашей работы при внедрении фракталов в школьную программу. Учитывая различия в уровне усвоения учебного материала у учащихся, мы предлагаем учителям две основные формы оценивания.

Формирующее оценивание: быстрые устные отчёты по шагам («что сделали и почему?»), стендовые сессии («вернисаж проектов»), мини-дневники наблюдений.

Итоговое оценивание: защита проекта, в котором есть (а) построение фрактала, (б) измерение/график/таблица, (в) аргументированное объяснение наблюденных эффектов.

Так же учитель может предложить свои критерии оценки навыков, которую можно адаптировать под уровень учащихся.

Ниже - готовая критерии, которые можно адаптировать под любые фрактальные проекты. [5,6]

Критерии оценивания (например, для проекта «Фракталы вокруг нас»)

Критерий	Описание	Баллы
Точность построения	Корректность итерационного алгоритма; аккуратность фигур; корректные измерения и подписи.	0–10
Понимание идеи	Устное/письменное объяснение самоподобия, итераций, роста периметра и предела площади.	0–10
Алгоритмичность	Наличие кода/скрипта GeoGebra/Python, комментарии к шагам, повторяемость эксперимента.	0–10
Анализ данных	Построение графиков (например, log N(ε) vs −log ε), интерпретация результатов, выводы.	0–10
Креативность	Выбор объекта, оригинальность визуализации, межпредметные связи (искусство, биология, ИКТ).	0–10
Самостоятельность	Распределение ролей в группе, инициатива, работа с источниками и фиксация прогресса.	0–10

Таблица 2

Итоговая оценка: сумма баллов (макс. 60) переводится в отметку по шкале, принятой в школе (рубежи определяет учитель). (Таблица 2)

5. Инструменты для визуализации: GeoGebra, Python, Desmos

Реализация на уроках: бумага в клетку/миллиметровка, линейка, угольник, цветные карандаши - достаточно для первых двух итераций ковра Серпинского, дерева Пифагора, кривой Коха на отрезке.

Цифровая реализация: GeoGebra для пошаговых построений и динамики; Desmos - для быстрых визуальных экспериментов; Python (например, turtle/matplotlib) - для автоматизации итераций и генерации данных (таблиц и графиков). Фальконер и Барнсли подчёркивают, что «алгоритм и визуализация должны идти рука об руку», чтобы интуиция подкреплялась вычислением. [3,4]

6. Типичные трудности и способы их преодоления

• Перегрузка терминами учащихся в следствии чего они теряют научный энтузиазмом. Решение: держать строгие определения «за спиной» учителя и давать ученикам действия и образы; только затем - аккуратные формулировки.
• Слишком много использование на уроках математики ИКТ. Решение: часть уроков проводить на бумаге; ИКТ использовать адресно - там, где даёт экономию времени.
• Неочевидность связи с программой. Решение: заранее вписать уроки в темы «подобие», «прогрессии», «площадь», «предел». Формулировки заданий и критериев сделать «школьными», а не «вузовскими» [6]

7. Педагогические результаты после внедрения

По итогам серии уроков учащиеся демонстрируют рост мотивации, аккуратности и самостоятельности. Они начинают использовать язык алгоритмов (итерации, шаг, правило), корректно объясняют масштабирование площадей и переносят эту идею на задачи по подобию фигур. Эксперименты со снежинкой Коха укрепляют понимание площади треугольника: учащиеся способны сами вывести формулу $S_0 = (\sqrt{3}/4)s^2$ и объяснить, почему площадь нарастает к пределу. Результаты согласуются с позицией Брунера о «прочности знаний, добытых через собственное открытие». [6]

Заключение

Фрактальная геометрия позволяет сделать школьную математику визуально понятнее для учащихся без потери основных правил и аксиом школьной математики. Модель T–S–A выстраивает понятный маршрут: от бесконечных узоров к понятным для них формул и алгоритмов. Сценарии уроков для 5, 8, 9 и 11 классов показывают, как реализовать тему с помощью подручных средств (бумага, карандаш, линейка и т.п) и ИКТ, а оценивания делает прогресс учащихся измеримым. Практика подтверждает: понимание площади треугольника, подобия и предела существенно укрепляется после работы со снежинкой Коха и другими фрактальными моделями. Следующий шаг - перенос опыта в цифровые учебники и олимпиадные форматы, чтобы идеи самоподобия стали привычной частью школьной математики. Фрактальная геометрия открывает возможности для цифровых учебников: динамические модели, интерактивные задания, автоматическая проверка шагов алгоритма (скрипты). Материал органично ложится в элективные курсы математики и информатики, а также в подготовку к математическим олимпиадам (разделы о рекурсии, инвариантах, конструктивных доказательствах). Такие форматы расширяют образовательную среду школы и способствуют созданию сообщества практиков. Как следствие, мы получаем совершенно новый подход в подаче знаний, включающий в себя визуальный подход, работу в команде, и рефлексию учащихся при изучении фракталов в курсе геометрии.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Hutchinson J. E. Fractals and self-similarity // Indiana University Mathematics Journal. 1981. Vol. 30, No. 5. P. 713–747.
2. Moran P. Additive functions of intervals and Hausdorff measure // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1946. Vol. 42, No. 1. P. 15–23.
3. Falconer K. J. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. 3rd ed. Chichester: Wiley, 2014. 368 p.
4. Barnsley M. F. Fractals Everywhere. 2nd ed. San Diego: Academic Press, 1993. 560 p.
5. Peitgen H.-O., Jürgens H., Saupe D. Fractals for the Classroom. Part One: Introduction to Fractals and Chaos. New York: Springer, 1992. 448 p.
6. Bruner J. S. The Process of Education. Cambridge (MA): Harvard University Press, 1960. 181 p.